Ecuaciones Cuadráticas

Carlos Torres N.

www.edumate.wordpress.com

Si he llegado al lugar donde estoy es porque he subido a hombros de gigantes. *Issac Newton*

1. Introducción

EL estudio de las ecuaciones es tan antigua como la invención de los primeros conocimientos matemáticos. Los rastros más antiguos que los especialistas en la historia de la matemática señalan se ubican en la cultura Babilónica [2].

Se tiene conocimiento de que la invención de álgebra *literal* se debió, en gran parte, a la notación usada por el matemático italiano Gerolamo Cardano, quien uso por primera vez la letra x para denotar a las variables.

Asimismo, las variables eran llamadas *indeterminadas*; actualmente algunos autores siguen manteniendo esta denominación.

2. Ecuación cuadrática

Generalmente se presenta las ecuaciones cuadráticas de incógnita x en su *forma polinomial* [1] siguiente:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$.
Por otro lado, su forma reducida es :

$$x^2 + nx + m = 0$$

Asimismo, se presentan otros ejemplos de ecuaciones cuadráticas:

- $3y^2 - 7y + 12 = 0$
- $\sqrt{2}x^2 + 0{,}5 = 0$

2.1. Métodos de resolución

Existen diversos métodos que nos ayudan a resolver una ecuación. Entre los métodos más usuales tenemos:

1. Método por factorización.
2. Método por fórmula general.

2.1.1. Método por factorización

En este caso, utilizaremos los diversos métodos de factorización para resolver una ecuación.
Por ejemplo, utilizamos el método del aspa simple para resolver la siguiente ecuación:

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

Solución:
Aplicando el método del aspa simple, obtenemos los factores correspondientes:

$$(x+4)(x+2)=0$$

Ahora, aplicando el teorema de números reales:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a.b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$

Tenemos que las dos raíces (o dos soluciones, en este caso) [1] de la ecuación son:

$$x_1=-4 \text{ y } x_2=-2$$

Finalmente, el conjunto solución de la ecuación es:

$$C.S.=\{-4,-2\}$$

[1] Aquí debemos hacer una aclaración. *Solución* de una ecuación en *general* se refiere al valor numérico que verifica la igualdad. Por otro lado, hablaremos de *raíz* cuando trabajemos ecuaciones polinómicas.
Ahora bien, en algunos casos, estrictamente en las ecuaciones polinómicas, puede suceder que las soluciones coincidan con las raíces; o que haya dos raíces de igual valor pero sólo una solución. En este último caso, señalaremos que existe una raíz de multiplicidad 2.
En general, en una ecuación polinomial se cumple

$$N^o soluciones \leq N^o raíces$$

La igualdad se cumple cuando todas las raíces son simples (*se repiten una sola vez*). De ahí que toda raíz es solución y viceversa.
Por ejemplo: La ecuación

$$(x+3)(x-1)(x-2)=0$$

posee como raíces a $-3,1,2$. Asimismo, se observa que todas las raíces son simples; en consecuencia, $-3,1,2$ serán soluciones de la ecuación.
Por otro lado, en la ecuación

$$(x-4)^3(x+5)^2(x+1)=0$$

Se observa que las raíces son -4 de multiplicidad 3 (*se repite 4 veces*), 5 de multiplicidad 2 (*se repite 2 veces*) y -1 que es una raíz simple. Por lo tanto, la ecuación tiene 6 raíces, pero sólo 3 soluciones $(4,-5,-1)$

2.1.2. Fórmula general

De (1) encontraremos la fórmula para hallar las raíces de la ecuacion polinómica cuadrática. Para ese fin, despejamos x de la forma siguiente:
Dividimos a (1) por a,

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

Ahora, completando cuadrados tenemos

$$x^2+2\left(\frac{b}{2a}\right)x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}=0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

A continuación, sacando raíz cuadrada a cada miembro de la igualdad

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

De esté último resultado, se desprenden dos igualdades en función de la definición del valor absoluto

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Finalmente, la fórmula general para encontrar las raíces de una ecuación cuadrática de la forma (1) queda expresada de la siguiente manera

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (2)$$

Esta igualdad se puede desdoblar en dos subigualdades

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo: Resolver

$$3x^2 + x + 5 = 0$$

Solución:

Aplicando la fórmula general (2) tenemos:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(3)(5)}}{2(3)}$$

Operando tendremos las dos soluciones de la ecuación

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-59}}{6}$$
$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-59}}{6}$$

Obs:
$\sqrt{-59}$ se puede expresar como $\sqrt{59}\sqrt{-1}$, pero como $\sqrt{-1} = i$, entonces $\sqrt{-59} = \sqrt{59}i$
Luego:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{59}i}{6}$$
$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{59}i}{6}$$

2.2. Relación entre raíces y coeficientes

Consideremos x_1 y x_2 raíces de la ecuación (1), entonces se establece las siguientes relaciones [2] en función de las raíces y los coeficientes, esto es

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \tag{3}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \tag{4}$$

Obs: Para encontrar la diferencia de las raíces, utilizamos la siguiente identidad algebraica:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2$$

que operando se obtiene

$$(x_1 - x_2)^2 = 4x_1x_2 + (x_1 + x_2)^2 \tag{5}$$

Aplicación:

Sean $x_1 \wedge x_2$ raíces de la ecuacíon

$$3x^2 + 7x + 2k = 0$$

Calcular k si $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 6$
Solución:

De la expresión $(x_1 + 3)(x_2 + 3) = 6$ se obtiene la siguiente relación

$$x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) = -3$$

Asimismo, se observa que encontramos las relaciones de las raíces (3) y (4). Además, de la ecuación presentada tenemos la siguiente relación de sus raíces:

$$x_1 + x_2 = \frac{-7}{3} \wedge x_1x_2 = \frac{2k}{3}$$

Reemplazando en

$$x_1x_2 + 3(x_1 + x_2) = -3$$

tenemos

$$\frac{2k}{3} + 3\left(\frac{-7}{3}\right) = -3$$
$$2k - 21 = -9$$
$$k = 6$$

[2] Establecidas por los matemáticos Gerolamo Cardano (1501-1576) y François Viète (1540-1603)

Nota 1:

- Si $x_1 \wedge x_2$ son raíces simétricas u opuestas, se cumple que $x_1 + x_2 = 0$
- Si $x_1 \wedge x_2$ son raíces recícprocas o inversas, se cumple que $x_1 x_2 = 1$

Nota 2:
Para formar la ecuación cuadrática a partir de sus raíces x_1 y x_2, procedemos de la siguiente forma

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \tag{6}$$

2.3. Análisis de sus raíces

De la fórmula general (2) se define el determinante (Δ) de la ecuación (1) como:

$$\Delta = b^2 - 4ac \tag{7}$$

Ahora, si reemplazamos Δ en (2), tendríamos que

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{8}$$

De (8) se establece las siguientes relaciones para las raíces de la ecuación:

- Si $\Delta > 0$, la ecuación posee raíces reales y diferentes.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación posee raíces reales e iguales.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación posee raíces complejas y conjugadas.

Obs:

Si $\Delta \geq 0$, la ecuación posee raíces reales.

2.4. Ecuaciones equivalentes

Dos o más ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución. Ahora bien, para el caso particular de dos ecuaciones equivalentes, por ejemplo

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$nx^2 + mx + p = 0$$

se cumple la siguiente relación entre sus coeficientes

$$\frac{a}{n} = \frac{b}{m} = \frac{c}{p} = cte \tag{9}$$

Aplicación:

Si las ecuaciones

$$(n-1)x^2 - (m+1)x + 3 = 0$$
$$mx^2 + (2-n)x + 2 = 0$$

son equivalentes, hallar $m + n$.

Solución:
De (9) establecemos la siguiente relación

$$\frac{n-1}{m} = \frac{-(m+1)}{2-n} = \frac{3}{2}$$

Considerando las igualdades

$$\frac{n-1}{m} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2n - 3m = 2$$
$$\frac{-(m+1)}{2-n} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3n - 2m = 8$$

Ahora, del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2n - 3m = 2 \\ 3n - 2m = 8 \end{cases}$$

encontramos que $n = 4$ y $m = 2$.
Luego, el valor de

$$n + m = 4 + 2 = 6$$

Por lo tanto:

$$n + m = 6$$

Teorema 1. *Para el caso que las ecuaciones*

$$x^2 + ax + b = 0$$

$$x^2 + px + q = 0$$

tengan una solución en común, se determina la siguiente relación

$$(q - b)^2 = (aq - bp)(q - b)$$

Demostración. Consideremos $x_1 \wedge x_2$ raíces del polinomio $P(x) = x^2 + ax + b$, entonces

$$P(x_1).P(x_2) = 0$$

Por otro lado, para $P(x)$ por (3) y (4) se desprende que $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = b \wedge x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2b \cdots (10)$

A continuación, evaluamos $x_1 \wedge x_2$ para el polinomio $Q(x) = x^2 + px + q$, considerando x_1 la raíz común entre $P(x)$ y $Q(x)$; que nos origina

$$Q(x_1).Q(x_2) = (x_1^2 + px_1 + q)(x_2^2 + px_2 + q) = 0$$

De ahí que:
$x_1^2x_2^2 + px_1^2x + qx_1^2 + pxx_2^2 + p^2x_1x_2 + pqx_1 + qx_2^2 + qpx_2 + q^2 = 0$

Agrupando convenientemente
$x_1^2x_2^2 + q(x_1^2 + x_2^2) + px_1x_2(x_1 + x_2) + p^2x_1x_2 + pq(x_1 + x_2) + q^2 = 0$

Ahora bien, de las relaciones (10), reemplazando en el resultado anterior

$$Q(x_1).Q(x_2) = (q - b)^2 + (p - a)(bp - aq) = 0$$

Finalmente:

$$(q - b)^2 = (aq - bp)(q - b)$$

□

2.5. Ejercicios

1. Calcular el valor de a si las raíces de la ecuación:

$$3(a - 4)x^2 - (5a - 8)x + 56 - 2a = 0$$

son recíprocas.
a) -4 b) -3 c) -2 d) -1 e) 0

2. A partir de la ecuación en x:

$$3x(x - 6) + 28n = 2(8 - nx)$$

Hallar el valor de n sabiendo que sus raíces son simétricas.
a) 7 b) 8 c) 6 d) -9 e) 9

3. Si m y n son raíces de la ecuación

$$x^2 - 6x + p = 0$$

Entonces el valor de

$$J = \frac{m^2 + n^2 + 2p}{3}$$

es igual a:
a) 12 b) 6 c) -6 d) 4 e) -3

4. Hallar el valor de m si las raíces que origina la ecuación

$$6x^2 - 11x + m = 0$$

son entre sí como 9 es a 2.
a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

5. Si las raíces de la ecuación

$$(x - a)^2 + (x - b)^2 + 2c^2 = (x + c)^2$$

son reales e iguales, podemos afirmar que:

a) $(-2a)$ es media armónica de b y c
b) $(-2a)$ es media armónica de b^2 y c^2
c) $(-2c)$ es media aritmética de a y b
d) $ab + ac + bc = 0$
e) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$

Referencias

[1] C. Chavez: *Notas de álgebra*.Ed. San Marcos, Lima.(1993)

[2] M. Acevedo M. Falk: *Recorriendo el álgebra*. Colciencias, Universidad Nacional de Colombia. (1997)